



# CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ  
16 martie 2019

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI –a

**Problema 1.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 1, & x < 1 \\ \sqrt{x^2 + 3} - m, & x \geq 1 \end{cases}$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .

- a) Să se demonstreze că funcția este continuă pe  $\mathbb{R}$ , oricare ar fi numărul real  $m$ .
- b) Să se demonstreze că ecuația  $f(x) = 0$  are cel puțin o rădăcină în intervalul  $(-1, \sqrt{6})$ , oricare ar fi  $m \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ .

**Problema 2.** Se consideră mulțimea  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \leq 1 \right\}$

- a) Justificați că matricea  $I_2 \in M$
- b) Demonstrați că pentru orice matrice  $X, Y \in M$  și produsul  $X \cdot Y \in M$
- c) Demonstrați că dacă  $A \in M$  este o matrice inversabilă având inversa  $A^{-1}$  tot din mulțimea  $M$ , atunci  $\det(A) = \det(A^{-1})$ .

**Problema 3.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^n + 1}{x^2 - 1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Să se studieze existența asimptotelor funcției  $f$ . Discuție după valorile lui  $n$ .

**Problema 4.** a) Stabiliți câte matrice pătratice de ordinul trei verifică simultan condițiile :

- i) au elementele numere naturale , ii) elementele de pe diagonala principală sunt egale cu 1,
- iii) suma elementelor de pe orice linie sau coloană este egală cu 2019 .

b) Dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a + b = 2018$  este o matrice de tipul anterior , deduceți că

$a^3 + b^3 - 3ab + 1$  se divide cu 2019.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.